**Министерство образования Республики Беларусь**

**Белорусский государственный университет**

**Факультет Прикладной математики и инфоРМАТИКИ**

**Кафедра информационных систем управления**

**Отчет о выполнении лабораторной работы №2 по «МВ»**

**Численное интегрирование**

Вариант 6а

Подготовил студент  
3 курса 12 группы  
Кулешевич Тимофей Витальевич

Преподаватель  
Будник А.М.

Минск, 2022

Оглавление

[**Постановка задачи** 3](#_Toc121706393)

[**Первое задание:** 4](#_Toc121706394)

[**Второе задание:** 6](#_Toc121706395)

[**Третье задание:** 9](#_Toc121706396)

# **Постановка задачи**

Дан интеграл .

1. Пользуясь выражением для погрешности интегрирования, определить шаг h в составной квадратурной формуле левых прямоугольников, который обеспечит вычисление с точностью .
2. Для вычисления интеграла применим квадратурную формулу Гаусса при заданном n. n = 6. Оценить погрешность через формулу .
3. Провести сравнительный анализ полученных результатов. Установить влияние АСТ на точность численного интегрирования.

**Генерация начальных данных**

# **Первое задание:**

Погрешность интегрирования для составной квадратурной формулы правых прямоугольников вычисляется по следующей формуле:

Найдем оценку сверху для погрешности, максимизировав функцию:

Нам необходимо, чтобы . Выразим из формулы количество разбиений:

Результат:

34497

**Результаты вычислений:**

Точное значение, посчитанное с помощью библиотечной функции:

0.52710806544549894291772637

Значение, полученное с помощью правых прямоугольников:

= 0.52711705409106224263

Верхняя оценка теоретической погрешности метода левых прямоугольников (должна быть меньше 10-5 т.к. мы вычисляли N относительно неё):

Реальная погрешность относительно точного решения:

**Вывод:**

Видно, что реальная погрешность согласуется с теоретической, и обе из них примерно равны 10-5, значит необходимая точность для данного интеграла действительно достигается при N = 34496 и соответственно при .

**Листинг:**

Получение точного значения:

I = integrate.quad(f, 0.4, 1.4)

Вычисление интеграла методом левых прямоугольников:

double integrateLeftRect()

{

double result = 0;

double h = (b - a) / N;

for (int i = 0; i <= N - 1; ++i)

{

result += f(a + h \* i);

}

return h \* result;

}

Вычисление теоретической погрешности:

double theoreticalError()

{

return -(pow((b - a), 2)) / (2 \* N) \* fDerivative(a);

}

Вычисление реальной погрешности:

double realError()

{

return abs(exact\_value - integrateLeftRect);

}

Функция первой производной:

double fDerivative(double x)

{

return -0.4 / exp(x) - 0.6 \* sin(x);

}

# **Второе задание:**

Чтобы вычислить интеграл с применением квадратурной формулы Гаусса при заданном нужно найти корни на интервале для полинома Лежандра.

Для n = 6 имеем:

Корни данного уравнения:

Чтобы получить для нужного интервала, выполним преобразование:

Посчитать приближенное значение интеграла можно формулой Гаусса:

Коэффициенты найдём по формуле:

Найдем оценку сверху для погрешности квадратурной формулы Гаусса по формуле:

Максимизируя производную и получаем оценку сверху:

**Результаты вычислений:**

Точное значение, посчитанное с помощью библиотечной функции:

I = 0.52710806544549894291772637

Значение, полученное с помощью квадратурной формулы Гаусса:

= 0.52710806544549804187

Оценка сверху теоретической погрешности для метода Гаусса:

1.8518880776740550465 \* 10-20

Реальная погрешность:

= 7.58130000000000000000 \* 10-16

**Вывод:**

Заметим, что точность вычислений при использовании функции Гаусса сильно выросла(с 10-6 до 10-16), кроме того обратим внимание, что реальная погрешность не согласуется с оценкой теоретической: . Скорее всего это связано с неточностью машинной арифметики, в частности для double в c++ существует ограничение eps по точности 2.22045e-16. Как видно значение посчитано с максимально возможной точностью.

**Листинг:**

Корни полинома Лежандра:

double legendre\_roots[] =

{

0, -0.4058451513773971669066064, 0.4058451513773971669066064,

-0.7415311855993944398638648, 0.7415311855993944398638648,

-0.9491079123427585245261897, 0.9491079123427585245261897

};

Вычисление иксов для нужного нам промежутка:

double root\_transform(double x)

{

(a + b) / 2 + (b - a) \* (x / 2);

}

for (int i = 0; i <= 6; ++i)

{

nodes[i] = root\_transform(legendre\_roots[i]);

}

Вычисление коэффицентов для функции Гаусса:

double gaussCoefs(double x)

{

double d = legendreDerivative(x);

return 2.0 / ((1 - (x\*x)) \* (d\*d));

}

for (int i = 0; i <= 6; ++i)

{

coefs[i] = gaussCoefs(legendre\_roots[i]);

}

Квадратурная функция Гаусса:

double gaussIntegrate()

{

double res = 0;

for (int i = 0; i <= 6; ++i)

{

res += coefs[i] \* f(nodes[i]);

}

return (b - a) / 2.0 \* res;

}

Подсчёт теоретической погрешности для метода гаусса:

double gaussR()

{

double M = 0.285239;

double a1 = pow((b - a) / 2, 15);

double a2 = pow(2, 15) / (87178291200.0 \* 15.0);

double a3 = (5040.0 \* 5040.0) / (87178291200.0);

return a1 \* a2 \* a3 \* a3 \* M;

}

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| **Третье задание**   |  |  | | --- | --- | | Точное значение | 0.52710806544549894291772637 | | Значение ЛП | 0.52711705409106224263 | | Теоретическая ЛП |  | | Реальная ЛП |  | | Значение Гаусс | 0.52710806544549804187 | | Теоретическая Гаусс | 1.8518880776740550465 \* 10-20 | | Реальная Гаусс | 7.58130000000000000000 \* 10-16 | |  |
|  |  |
|  |  |

**Вывод:**

Можно заметить, что методом гаусса точность гораздо лучше (примерно в 1010 раз), это объясняется большим значением АСТ у метода гаусса, равной (2n - 1), то есть 11, против АСТ = 0 у метода левых прямоугольников.